תרגיל בית 1 - מרחבי מכפלה פנימית

תרגיל 1. תהי V קבוצת הפונקציות הרציפות בקטע $0 < x \le 1$ והמקיימות $\int_0^1 x|f(x)|^2 dx < \infty$.

א. הוכיחו כי V מרחב ליניארי ו- $\langle f,g\rangle = \int_0^1 xf(x)\overline{g(x)}dx$ מכפלה פנימית ב- V .

ב. מצאו שתי פונקציות $f(x), g(x) \in V$ המקיימות את התנאים הבאים :

(i) כל אחת מהפונקציות אינה חסומה בקטע $0 < x \le 1$.

(ii) הפונקציות אורתוגונליות זו לזו ביחס למכפלה הפנימית שהוגדרה לעיל .

תרגיל 2. מצאו את כל המספרים a, b, c, d שעבורם הפונקציה F (של ארבעה משתנים)

$$F(a,b,c,d) = \int_{-\pi}^{\pi} \left| x^2 - ae^{ix} - b - c\cos x - d\cos 3x \right|^2 dx$$

מקבלת את ערכה המינימלי .

תרגיל 3. במרחב $C[0,\pi]$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle = \int_0^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$ מצאו את המרחק בין הפונקציה $f(x) = 1$ לבין התת-מרחב $W = span\{\sin 2x, \sin 4x, \sin 7x\}$.

תרגיל 4. עבור שתי הפונקציות הרציפות $f(x)$ ו- $g(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ מתקיים :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx = \frac{n^5}{2^{|n|}} \qquad n = 0, \pm1, \pm2, \dots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{inx}dx = \frac{1}{3^{|n|}} \qquad n = 0, \pm1, \pm2, \dots$$

א. הוכיחו כי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ אורתוגונליות זו לזו ביחס למכפלה הפנימית

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

ב. חשבו את הנורמה של הפונקציה $g(x)$ המושרת על-ידי מכפלה פנימית זו .